מתמטיקה דיסקרטית לתלמידי הנדסה ומדעים

פרק 12 - תורת הגרפים

תוכן העניינים

1. מבוא לתורת הגרפים 1
2. גרף דו צדדי 7
3. עצים 10
4. מעגלים מיוחדים 14
5. איזומורפיזם 18

מבוא לתורת הגרפים

שאלות

הערה: חלק קטן משאלות פרק זה מסתמכות על מושג העץ.
רצוי ללמוד את הפרק עצים שהוא פרק חשוב ביותר.

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהי $G=(V,E)$ גרף על 43 צמתים: 10 צמתים מדרגה 7, 17 צמתים מדרגה 6, 12 צמתים מדרגה 4 והיתר מדרגה 1.
כמה קשתות יש ב- G?

ב. הוכיחו כי בכל גרף מספר הצמתים מדרגה אי-זוגית הוא זוגי.

2) עבור $n\in\mathbb{N}$ נגדיר גרף פשוט G_n, כך שצמתיו הם 2^n הסדרות הבינאריות באורך n, ושני קודקודים מחוברים ביניהם בקשת אם ורק אם הם נבדלים בקואורדינטה אחת.
מה מספר הקשתות של G_5 ושל G_n? (גרף כזה נקרא גרף הקובייה)

3) נגדיר גרף $G=(V,E)$ באופן הבא: $V=\{A\in P\{1,2,3,4,5,6,7\}\,\|A|=3\}$
$E=\{\{A,B\}\,\|A\cap B|=1\}$, למשל $\{\{2,4,7\},\{1,4,6\}\}\in E$, כי בחיתוך יש איבר אחד.

א. מהו מספר הצמתים? מה דרגת כל קודקוד? מה מספר הקשתות?

ב. האם G דו"צ?

4) חזרו על שאלה קודמת עבור הגרף $G=(V,E)$ באופן הבא:
V כמו קודם ו- $E=\{\{A,B\}|A\cap B=\varnothing\}$.

5) יהי $G=(V,E)$ על 7 צמתים: 4 מהצמתים הם מדרגה 5 וכל יתר הדרגות קטנות מ-3.
מהן האפשרויות הנכונות?

א. יש גרף פשוט כזה, שהוא קשיר.

ב. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.

ג. יש גרף כזה, אבל הוא לא פשוט ולא קשיר.

ד. יש גרף כזה, והוא לא פשוט וקשיר.

6) נתונים שני גרפים G_2 , G_1 על 5 קודקודים. סדרת דרגותיו של G_1 היא 2,2,3,4,5,5,6 וסדרת דרגותיו של G_2 היא 1,2,3,4,4.
לגבי כל אחד משני הגרפים קבעו איזו מן הטענות הבאות נכונה:

א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.
ב. יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא פשוט.
ג. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.
ד. יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.
ה. לא קיים גרף כזה.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהי G גרף פשוט בעל n קודקודים.
הוכיחו כי אם לכל שני קודקודים $x,y\in V$ מתקיים $d(x)+d(y)\geq n-1$, אז G קשיר.
ב. הוכיחו באינדוקציה כי גרף על n קודקודים ופחות מ-$n-1$ קשתות אינו קשיר.

8) יהי G גרף פשוט בעל n קודקודים.
הוכיחו כי אם: $|E|>\binom{n-1}{2}$ $(*)$ אז G קשיר, כאשר $|E|$ מספר הקשתות.
הראו גם כי חסם זה הדוק. כלומר, הראו גרף פשוט G, עבורו $|E|=\binom{n-1}{2}$, כך ש-G אינו קשיר. זה מראה שלא ניתן לשפר את אי השוויון $(*)$.

9) יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט ויהיו $x,y\in V$ שני קודקודים לא שכנים.
הוכיחו כי אם $d(x)+d(y)\geq n$, אז יש ל-x ול-y לפחות שני שכנים משותפים.

10) יהי G גרף פשוט על $n\geq 2$ צמתים, ויהיו $u,v\in V$ קודקודים שאינם שכנים.
הוכיחו כי אם: $d(u),d(v)\geq\frac{n+1}{2}$ אז יש ל-u,v לפחות שלושה שכנים משותפים.

11) יהי $G=(V,E)$ גרף, כך ש-$(n\geq 2)$, $V=P_2(\{1,2,..,n\})$, $e\in E \iff A\cap B=\phi$, כאשר $A,B\in V$.

א. חשבו את $|V|$.
ב. מהי דרגת כל צומת?
ג. הוכיחו כי אם $n\geq 5$ אזי G קשיר (רמז: דרך השלילה).

(12 יהי G גרף פשוט על 10 קודקודים שיש בו 41 קשתות.
הוכיחו:
א. יש לפחות שני קודקודים ב-G שדרגתם היא 9.
ב. G קשיר.

(13 יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט.
הוכיחו כי אם $|V|=|E|$, אז ב- G יש מעגל, ואם G קשיר, אז המעגל יחיד.

(14 יהי G גרף פשוט קשיר בן 7 קודקודים, שסדרת דרגותיו היא 3,2,2,2,1,1,1.
כמה מעגלים פשוטים יש בגרף?

(15 יהי G גרף פשוט בעל n קודקודים.
הוכיחו כי אם לכל קודקוד $x \in V$ מתקיים $d(x) \geq \frac{n}{2}$, אז ב- G מעגל באורך 4.

(16 הוכיחו כי בכל גרף פשוט על 100 קודקודים, שבו כל הדרגות הן לפחות 10,
יש מעגל באורך ≥ 4.

(17 יהי G גרף פשוט.
הוכיחו כי לפחות אחד מבין הגרפים $G,\bar{G}$ קשיר.
בניסוח שקול: הוכיחו כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_n בשני צבעים לפחות, אחד הגרפים החד צבעיים הוא קשיר.

(18 הוכיחו כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_6 בשני צבעים, יש משולש מונוכרומטי (משולש חד צבעי).

(19 הוכיחו כי בכל קבוצה של 9 אנשים יש בהכרח לפחות 4 המכירים זה את זה או לפחות 3 שאף שניים מהם אינם מכירים זה את זה.

(20 יהי G גרף שקודקודיו הם תתי קבוצות בנות 4 אברים של הקבוצה $\{1,2,\ldots,n\}$, (כאשר n גדול מ-6). שני קודקודים מחוברים בקשת בגרף אם בחיתוך שלהם יש שני אברים <u>בדיוק</u>. לדוגמה, הקודקוד $\{1,2,3,4\}$ שכן של $\{1,2,7,8\}$, אך לא של $\{1,2,3,7\}$.
כמה קודקודים בגרף הם שכנים של $\{1,2,3,5\}$, $\{1,2,3,4\}$ או $\{1,2,4,5\}$?

21) הוכיחו כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_{17} ב-8 צבעים יש מעגל שכל קשתותיו צבועות בצבע אחד (מעגל מונוכרומטי).

22) כמה מעגלים פשוטים באורך $3 \le k \le n$ יש בגרף השלם K_n על קבוצת הקודקודים $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$?
שני מעגלים המתקבלים אחד מהשני על ידי סיבוב נחשבים זהים.
למשל, עבור $n=5$, שני המעגלים $1,2,3,4,5,1$ ו- $3,4,5,1,2,3$ נחשבים זהים, ואילו המעגלים $1,2,3,1$ ו- $1,3,2,1$ אינם זהים.

23) נצבע ב- $n \ge 2$ צבעים את קשתות הגרף השלם K_n, כך שכל צבע מופיע לפחות פעם אחת.
הוכיחו כי קיים מעגל שכל קשתותיו צבועות בצבעים שונים.

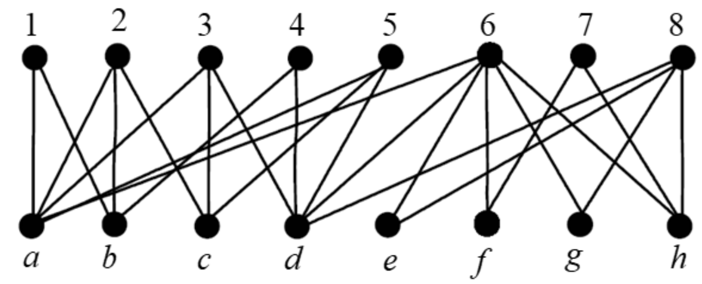
24) יהי G גרף קשיר על 13 קודקודים, שניתן לצבוע בשלושה צבעים (כלומר, אפשר לצבוע את הקודקודים בשלושה צבעים, כך שאין שני קודקודים מאותו צבע שמחוברים בקשת).
הוכיחו שיש בגרף אנטי קליקה בגודל 5 (כלומר, 5 קודקודים שאף אחד מהם לא מחובר לאף אחד אחר).

25) נתונים שלושה גרפים בעלי אותה קבוצת קודקודים $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ ו- $G_3=(V,E_3)$. נגדיר $G=(V,E_1\cup E_2\cup E_3)$ כאיחוד שלושת הגרפים, ונניח כי לכל קודקוד ב- V דרגתו ב- G היא לפחות 6.
הוכיחו כי לפחות אחד מהגרפים G_1, G_2 ו- G_3 <u>אינו</u> חסר-מעגלים.
שאלה זו מופיעה גם בפרק עצים.

26) יהי G_n גרף פשוט שקודקודיו הם כל תתי-הקבוצות של $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$, למעט $\varnothing$ ו- $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$ עצמה. שני קודקודים הם שכנים אם ורק אם אף אחד אינו מוכל במשנהו.
א. הוכיחו כי לכל $n \ge 2$, G_n קשיר.
ב. הוכיחו כי אם v תת קבוצה בת k אברים של $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$ אז דרגתה כקודקוד ב- G_n היא: $2^n-2^{n-k}-2^k+1$.
ג. הוכיחו כי לכל $n \ge 3$ קיים מעגל המילטון ב- G_n. מותר להסתמך על סעיפים קודמים ועל העובדה ש- $2^{n-k}+2^k \le 2^{n-1}+2$.

27) כמה זיווגים מושלמים יש,
(שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי)
א. בגרף המלא K_5 ?
ב. בגרף המלא K_6 ?
ג. בגרף הדו״צ המלא $K_{5,5}$?
(הגדרת גרף דו״צ בפרק גרף דו צדדי)
ד. בגרף הדו״צ המלא $K_{5,5}$, כאשר מחקנו שלוש קשתות שיש להן צומת משותף?

28) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הוכיחו כי בגרף הבא אין זווג מושלם.
ב. מצאו זווג מקסימום.
ג. מהו המספר המינימלי של קשתות שיש להוסיף לגרף כך שיהיה זווג?



29) יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט, ונגדיר גרף חדש $H=(V,E')$ באופן הבא:
$E'=\{\{x,y\} | x,y\in V \wedge \exists z\in V : \{\{x,z\},\{y,z\}\}\subseteq E\}$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם G קשיר, אז H קשיר.
ב. אם G קשיר, אז H לא קשיר.
ג. אם H קשיר, אז G קשיר.
ד. אם H קשיר, אז G לא קשיר.

30) נתון גרף G.
הוכיחו כי אם $\bar{G}$ לא קשיר, אז לכל שני קודקודים x,y ב- G מתקיים $d(x,y)\le 2$ (כאשר $d(x,y)$ הוא המרחק בין x ל- y).

31) נתונה קבוצה בת 5 קודקודים $V=\{v,u,t,s,r\}$.
כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים V מקיימים שדרגת כל קודקוד קטנה ממש מ-4?

32) יהי G גרף חסר מעגלים כעל 20 קודקודים ו-15 קשתות.
כמה רכיבי קשירות בגרף?

33) הוכיחו כי בכל צביעה של קשתות K_{2t+1} ב- t צבעים, נקבל מעגל חד צבעי.

גרף דו צדדי

שאלות

1) נגדיר גרף $G=(V,E)$ באופן הבא: $V=\{A\in P\{1,2,3,4,5,6,7\} \mid |A|=3\}$
$E=\{\{A,B\} \mid |A\cap B|=1\}$.
א. האם G דו צדדי?
ב. האם G דו קשיר?

2) יהי $G=(V,E)$ גרף, כאשר כל צומת של G היא סדרה בינארית באורך 6.
למשל, 000000 צומת של G. שני צמתים הם מחוברים אם הם נבדלים זה מזה בשני מקומות בדיוק. למשל, 010111 מחובר ל-011101, כי הם נבדלים במקומות השלישי והחמישי.
א. כמה קשתות יש ל-G?
ב. האם G קשיר? כמה רכיבי קשירות יש ל-G?
ג. האם G דו״צ?
ד. (למי שלמדו גרפים מישוריים, האם G מישורי?)

3) מחקו $n-1$ קשתות מן הגרף הדו-צדדי השלם $K_{2,n}$ (כאשר $n\geq 1$) והתקבל גרף G שאין בו קודקודים מבודדים (כלומר, אין בו קודקודים שדרגתם אפס).
הוכיחו ש-G הוא עץ (שאלה זו מופיעה גם בפרק עצים).

4) מה הגרף המשלים של הגרפים הדו״צ $K_{4,4}, K_{5,5}$, ובאופן כללי $K_{n,n}$?

5) יהיו $G_1=(V_1,E_1)$ ו-$G_2=(V_2,E_2)$ שני גרפים, כאשר האיחוד שלהם מוגדר להיות $G_1\cup G_2=(V,E)$ כש-$V=V_1\cup V_2, E=E_1\cup E_2$.
הוכיחו או הפריכו:
א. איחוד של שני גרפים דו״צ הוא גרף דו״צ.
ב. איחוד של שני גרפים דו״צ על קבוצות צמתים זרות הוא גרף דו״צ.
ג. איחוד של n גרפים דו״צ על קבוצות צמתים זרות הוא גרף דו״צ.
ד. איחוד של n גרפים דו״צ על קבוצות צמתים זרות בזוגות הוא גרף דו״צ.

6) הציגו את K_{16} כאיחוד של 4 גרפים דו״צ.

7) הוכיחו או הפריכו:
אם $G=(V,E)$ גרף דו״צ k רגולרי שצדדיו הם A,B, אז $|A|=|B|$.

8) יהיו $G_1,G_2,G_3,\cdots,G_7$ שבעה גרפים דו״צ שונים על אותה קבוצות צמתים V.
לכל גרף צדדים A_i,B_i, כאשר $i=1,2,3,4,5,6,7$. כמובן שבסימונים אלה
מתקיים $A_i\cap B_i=\varnothing$, $A_i\cup B_i=V$ לכל $1\le i\le 7$.
יהי G איחוד כל הגרפים האלה, כאשר אם יש קשר המופיע בכמה גרפים ניקח רק קשת אחת, כך שאין קשתות מרובות והגרף שהגדרנו הוא גרף פשוט.
לכל צומת ב- G נתאים סדרה בת שבע אותיות לפי הצדדים אליה הוא שייך בגרפים $G_1,G_2,G_3,\cdots,G_7$, בהתאמה.
למשל, אם v שייך לקבוצות $A_1,A_2,B_3,B_4,B_5,A_6,A_7$, כלומר בשני הגרפים הראשונים הוא בצד A, בשלושת הגרפים הבאים בצד B, ובשני הגרפים האחרונים בצד A, אז נשמיט את האינדקסים ונתאים לו את המילה $AABBBAA$.
כלומר, ל- v שלנו תתאים המילה $AABBBAA$, ובאופן דומה, לכל צומת תתאים מילה בת 7 אותיות.
הוכיחו כי אם לשני צמתים u,v מתאימה אותה מילה אז אין צומת ב- G בין u לבין v.

9) יהי G גרף דו צדדי $V=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\varnothing$, ונתון כי G הוא d רגולרי, $d\ge 1$.
הוכיחו כי $|V_1|=|V_2|$.

10) הוכיחו או הפריכו:
א. אם לגרף יש שני רכיבי קשירות בדיוק, אז הגרף המשלים הוא דו צדדי.
ב. אם לגרף יש שני רכיבי קשירות בדיוק, אז הגרף המשלים אינו דו צדדי.

11) כמה זיווגים מושלמים יש,
(שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי)
א. בגרף המלא K_5?
ב. בגרף המלא K_6?
ג. בגרף הדו״צ המלא $K_{5,5}$?
(הגדרת גרף דו״צ בפרק גרף דו צדדי)
ד. בגרף הדו״צ המלא $K_{5,5}$ כאשר מחקנו שלוש קשתות שיש להן צומת משותף?

12) יהי $G=(V,E)$ גרף דו-צדדי פשוט., וכן $|V|=n$.
הוכיחו כי $|E|\le\frac{n^2}{4}$.

13) נגדיר גרף שצמתיו הם $P\left(\{1,2,3,\cdots n\}\right)$ (יש 2^n צמתים), ושני צמתים מחוברים, אם אחד מהם מכיל את השני והם נבדלים באיבר אחד.
(למשל, $\{1,2,5,7\},\{1,5,7\}$ מחוברים)

א. הוכיחו כי G קשיר.
ב. הוכיחו כי G רגולרי.
ג. הוכיחו כי G הוא גרף דו"צ.

14) הוכיחו או הפריכו: אם $G=(V,E)$ אוילרי דו צדדי, אז: $|V|\in\mathbb{N}_{even}$.
(שאלה זו מופיעה גם בפרק מעגלים מיוחדים)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

עצים

שאלות

1) יהי T עץ שעל $n\geq 2$ קודקודים שלו בדיוק שני עלים.
מהן דרגות קודקודי T? רשמו אותן לכל $n\geq 2$, בסדר עולה משמאל לימין (סדרת הדרגות) והוכיחו נכונות תשובתכם.

2) יהי $T=(V,E)$ עץ.
הוכיחו שאם כל דרגותיו אי-זוגיות, אזי גם $|E|$ הוא מספר אי-זוגי.

3) יהי T עץ על $n\geq 4$ קודקודים. אורך המסלול הפשוט הארוך ביותר ב-T הוא $n-2$ (יש מסלול פשוט באורך $n-2$ ואין מסלול ארוך יותר).
מהן דרגות קודקודי T? רשמו אותן בסדר עולה משמאל לימין (סדרת הדרגות).

4) יהי T עץ. נוסיף ל-T קודקוד שנקרא לו v, וקשתות מ-v לחלק מקודקודי T.
מה צריכה להיות דרגת v כדי שבגרף המתקבל יהיה בדיוק מעגל פשוט אחד?
הוכיחו שאם דרגת v תהיה גדולה יותר, בגרף יהיה יותר ממעגל פשוט אחד.

5) G גרף עם 20 קודקודים ו-15 קשתות ללא מעגלים.
כמה רכיבי קשירות בגרף?

6) נתונה קבוצה של 10 קודקודים, ואוסף שקפים שעליהם מצוירים <u>עצים</u> על אותם עשרה קודקודים. גיורא מניח מספר כלשהו של שקפים זה על זה ומקפיד שאף קשת משקף אחד לא תכסה על אותה קשת בשקף אחר (כלומר, אין אף קשת משותפת לשני עצים שונים).
הוכיחו שהגרף שגיורא מקבל מאיחוד העצים שמצוירים על השקפים לא יכול להיות גרף שכל דרגותיו שווֹת ל-5.
רמז: חשבו את מספר הקשתות בגרף.

7) יהיו $T_1=(V,E_1)$, $T_2=(V,E_2)$ שני עצים על אותה קבוצת קודקודים,
ונגדיר גרף G על אותה קבוצת קודקודים, שקשתותיו $E=E_1\cup E_2$.
הוכיחו כי קיים $x\in V$, כך ש-$d(x)\leq 3$ (דרגתו של x ב-G).

8) יהיו $T_1=\langle V_1,E_1\rangle$, $T_2=\langle V_2,E_2\rangle$ עצים, ונגדיר גרף G כך: $G=\langle V_1\cup V_2,E_1\cup E_2\rangle$.

א. נתון כי $V_1\cap V_2=\{v\}$.
האם G בהכרח עץ? נמקו.

ב. נתון כי $E_1\cap E_2=\{e\}$.
האם G בהכרח עץ? נמקו.

9) יהי T עץ על $n\ge 3$ קודקודים ויהי v קדקוד ב-T מדרגה 2.
יהי k מספר רכיבי הקשירות של $T-v$ (שהוא תת הגרף של T המתקבל ממחיקת v, והקשתות ש-v קצה שלהן).
מה הם הערכים האפשריים עבור k? הוכיחו.

10) יהי T עץ בעל n קודקודים, ונתון שדרגותיו הן 1,3,5 בלבד. יש 7 קודקודים מדרגה 3 ו-10 מדרגה 5.
כמה עלים יש בעץ?

11) יהי $T=(V,E)$ עץ, שבו $|V|=n$. דרגות צמתי T הן 1,3,5 בלבד. מספר הצמתים שלהם מדרגה 3 הוא 10 ומספר הצמתים שלהם מדרגה 5 הוא 12.
כמה עלים (צמתים מדרגה 1) יש לעץ?

12) הוכיחו כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_n בשני צבעים קיים עץ פורש מונוכרומטי.
הערה: עץ פורש הוא עץ שקודקודיו הם כל קודקודי G וקשתותיו הן חלק מקשתות G.

13) יהי $G=(V,E)$ $|V|=n,$ גרף פשוט וחסר מעגלים, שבו k רכיבי קשירות.
הוכיחו כי $|E|=n-k$.

14) מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים $V=\{1,2,3,4,5,6\}$, <u>שאף</u> שניים מהם אינם איזומורפיים?
(שאלה זו מופיעה גם בפרק איזומורפיזם)

15) מחקו $n-1$ קשתות מן הגרף הדו-צדדי השלם $K_{2,n}$ (כאשר $n\ge 1$), והתקבל גרף G שאין בו קודקודים מבודדים (כלומר, אין בו קודקודים שדרגתם אפס).
הוכיחו ש-G הוא עץ (שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי).

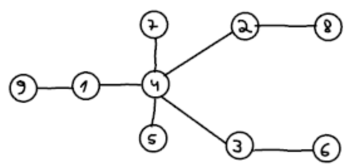
16) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונים שלושה גרפים בעלי אותה קבוצת קודקודים $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ ו- $G_3=(V,E_3)$.
נגדיר $G=(V,E_1\cup E_2\cup E_3)$ כאיחוד שלושת הגרפים, ונניח כי לכל קודקוד ב- V דרגתו ב- G היא לפחות 6.
הוכיחו כי לפחות אחד מהגרפים G_1, G_2 ו- G_3 <u>אינו</u> חסר-מעגלים.

ב. יהיו $G_1=(V_1,E_1),G_2=(V_2,E_2),G_3=(V_3,E_3)$ שלושה עצים על אותה קבוצת צמתים V.
לכל צומת $v\in V$ נסמן ב- $d_i(v)$ את הדרגה של v ב- G_i, אשר $i=1,2,3$.
הוכיחו כי קיים צומת $v\in V$, שעבורו $\sum_{i=1}^{3}d_i(v)\le 5$.

17) מיהו העץ הממוספר המותאם למילה $(1,1,3,4,3,6,10,1)$?

18) מהי סדרת פרופר של העץ הבא?



19) בכמה עצים שונים על קבוצת הצמתים $\{1,2,3,4,5,6\}$ אין שום צומת מדרגה זוגית?

20) בכמה עצים על קבוצת הקודקודים $\{1,2,3,4,\cdots,10\}$ כל העלים הם מספרים זוגיים?

21) כמה עצים שונים יש על הקודקודים $\{1,\ldots n\}$, שלהם בדיוק שני עלים?

22) T הוא עץ בעל 60 צמתים, מתוכם בדיוק 10 צמתים מדרגה 3 ואין בצמתים מדרגה גדולה מ-3.
א. הדגימו עץ כזה.
ב. מצאו את מספר העלים ללא שימוש בקוד פרופר.
ג. מצאו את מספר העלים בעזרת קוד פרופר.

23) בכמה עצים על הקודקודים $\{1,2,3,\cdots,10\}$ יש שלושה עלים והם (ורק הם): 8,9,10?

24) יהי G גרף פשוט על n קודקודים המכיל מעגל המילטון, ונתון כי על ידי השמטת קשתות המעגל מתקבל תת גרף של G שהוא עץ.
האם ניתן על סמך הנתונים לקבוע כמה קשתות בגרף G? אם כן, מהו מספר הקשתות?
(שאלה זו מופיעה גם בפרק מעגלים מיוחדים)

25) מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים $V=\{1,2,3,4,5,6\}$, שאף שניים מהם אינם איזומורפיים?
(שאלה זו מופיעה בפרק איזומורפיזם)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מעגלים מיוחדים

הערה: חלק קטן משאלות פרק זה מסתמכות על מושג העץ.
רצוי ללמוד את הפרק עצים שהוא פרק חשוב ביותר.

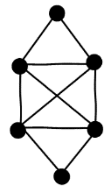
דוגמאות

1) צפו בסרטון על מעגלי המילטון והוכיחו כי:
א. תנאי אורה אינו תנאי הכרחי.
ב. החסם במשפט אורה הוא הדוק.

2) בשאלה זו נחקור את הקשר בין המושג מעגל אוילר לבין מעגל המילטון.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם G המילטוני, אז G אוילרי.
ב. אם G המילטוני, אז G לא אוילרי.
ג. אם G לא המילטוני, אז G אוילרי.
ד. אם G לא המילטוני, אז G לא אוילרי.
ה. לעניין הקשר בין המושגים, מה המסקנה המתבקשת מסעיפים א-ד?
ו. אם G הוא גם אוילרי וגם המילטוני, אז יש בו מסלול שהוא בעת ובעונה אחת גם מסלול אוילר וגם מסלול המילטון.
ז. אם G אוילרי וגם המילטוני, אז G הוא מעגל פשוט.
ח. אם יש ב- G מסלול שהוא בעת ובעונה אחת מעגל אוילר וגם מעגל המילטון, אז G הוא מעגל פשוט.

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:
א. מצא מעגל אוילר, מעגל המילטון, ומסלול המילטון שאינו מעגל המילטון בגרף הבא:



ב. הוכיחו את הטענה הבאה, או תנו דוגמה נגדית והסבר שמראה שאכן מדובר בדוגמה נגדית: אם בגרף יש מעגל המילטון, אז יש בו מעגל אוילר.

2) נגדיר גרף $G=(V,E)$ באופן הבא: $V=\{A\in P\{1,2,3,4,5,6,7\} \| |A|=3\}$
$E=\{\{A,B\} \| |A\cap B|=1\}$. למשל, $\{\{2,4,7\},\{1,4,6\}\}\in E$.
א. מהו מספר הצמתים? מה דרגת כל קודקוד? מה מספר הקשתות?
ב. האם G דו"צ?
ג. האם G אוילרי?
ד. האם G המילטוני?

3) מהו האורך המירבי של מסלול ב-K_{2n+1}? נמקו.

4) הוכיחו בכל גרף שכל דרגותיו 4 ניתן לצבוע את קשתותיו כך מכל קודקוד יצאו בדיוק שתי קשתות מכל צבע.

5) ענו על הסעיפים הבאים:
א. יהי G גרף שקודקודיו הן תתי קבוצות בנות 4 איברים של $\{1,2,3,\cdots,8\}$, כאשר שני קודקודים מחוברים אם ורק אם בקבוצות יש 2 איברים בדיוק. האם ב-G יש מעגל המילטון?
ב. יהי $K_{m,n}$ גרף דו צדדי שלם.
הוכיחו כי $K_{m,n}$ המילטוני $\Leftrightarrow m=n$.

6) יהיו $G_2=(V_2,E_2)$, $G_1=(V_1,E_1)$, $V_2\cap V_1=\varnothing$, $E_1\cap E_1=\varnothing$ שני גרפים אוילריים פשוטים. נגדיר $G=(V,E)$ באופן הבא: $E=E_1\cup E_2$, $V=V_1\cup V_2$, ומלכדים צומת $u_1\in V_1$ עם צומת $u_2\in V_2$. האם G אוילרי?
אם נחבר את u_1 עם u_2 במקום ללכד אותם, האם כעת G אוילרי?

7) יהי $G=(V,E)$ גרף אוילריאני בעל מספר אי זוגי של צמתים.
הוכיחו כי יש ב-G לפחות שלושה צמתים בעלי אותה דרגה.
(שובך היונים, מספר הקודקודים $2n+1$ ויש n דרגות אפשריות כי כולן זוגיות)

8) יהי G גרף בעל שני רכיבי קשירות, T_1 ו-T_2, שכל אחד מהם עץ. נוסיף שתי קשתות חדשות ל-G (קבוצת הקודקודים נשארת ללא שינוי) ויתקבל גרף חדש $\tilde{G}$.
א. הוכיחו שב-$\tilde{G}$ בהכרח יש מעגל.
ב. בנו דוגמה שבה ב-$\tilde{G}$ יש מעגל המילטון.

(9 יהי G גרף פשוט על $n\geq 3$ קודקודים.
נתון:
1. n מספר זוגי.
2. כל הדרגות ב-G שוות (כלומר G גרף רגולרי).
3. גם G וגם $\bar{G}$ קשירים.

הוכיחו שלפחות באחד מבין G ו- $\bar{G}$ יש מעגל המילטון.

(10 הוכיחו או הפריכו: אם G אוילרי דו"צ, אז מספר הצמתים של G הוא זוגי.

(11 עבור $A=\{1,2,3\}$, נגדיר $G=(V,E)$, כאשר $V=A\times A$ (9 צמתים), ואת E קבוצת הצמתים נגדיר באופן הבא: $\{(a,b),(c,d)\}\in E$ אם ורק אם $a+b\neq c+d$.

א. הוכיחו כי G קשיר.
ב. מה דרגת הצומת $(1,1)$ ומה דרגת הצומת $(2,3)$? כמה קשתות יש ב- G?
ג. הוכיחו כי אין ב- G מסלול אוילר.

(12 יהי G גרף פשוט 3-רגולארי על $n\geq 4$ קודקודים. נתון שב-G יש מעגל המילטון. הוכיחו שתת הגרף של G, המתקבל ממחיקת כל הקשתות ששייכות למעגל המילטון, הוא בעל $\frac{n}{2}$ רכיבי קשירות (בפרט, יש להוכיח ש-n זוגי).

(13 יהיו $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ שני גרפים על אותה קבוצת קודקודים V. נגדיר את הגרף $G=(V,E_1\oplus E_2)$, כאשר $E_1\oplus E_2$ הוא ההפרש הסימטרי של שתי קבוצות הקשתות (כל הקשתות שנמצאות ב- E_1 או ב- E_2 אבל לא בשתיהן). הוכיחו כי אם ב- G_1,G_2 יש מעגל אוילר ו- G קשיר, אז גם בו יש מעגל אוילר.

(14 יהי $G=(V,E)$ גרף על n צמתים.

א. הוכיחו כי אם $|E|>\binom{n-1}{2}+1$, אז G המילטוני.
ב. הוכיחו כי החסם הנ"ל הדוק. כלומר, כי הטענה: אם $|E|\geq\binom{n-1}{2}+1$, אז G המילטוני – איננה נכונה.

(15 נתון $G=(V,E)$ גרף אוילרי שיש בו שלוש קשתות $e_1,e_2,e_3\in E$, שלאחר הסרתן מהגרף, G נשאר אוילרי.

א. הדגימו גרף כזה.
ב. הוכיחו כי G לא דו"צ.

16) נתון G גרף אוילר, ונגדיר שיטה: נבחר קודקוד, נתחיל ממנו מסלול, ונמשיך אותו כרצוננו כל עוד אפשר בלי לחזור על קשת פעמיים.
א. הוכיחו כי בשיטה זו תמיד נקבל מעגל.
ב. האם בשיטה זו מתקבל תמיד מעגל אוילר?
ג. נתון כי G גם המילטוני.
האם בהכרח יש בו מסלול שהוא גם מעגל אוילר וגם מעגל המילטון?

17) יהי G גרף פשוט על n קודקודים, המכיל מעגל המילטון, ונתון כי על ידי השמטת קשתות המעגל מתקבל תת גרף של G שהוא עץ.
האם ניתן על סמך הנתונים לקבוע כמה קשתות בגרף G? אם כן, מהו מספר הקשתות?
(שאלה זו מופיעה גם בפרק מעגלים מיוחדים)

18) יהי G גרף, לאו דווקא קשיר, שכל דרגותיו אי זוגיות. נבנה גרף H שקודקודיו הם קודקודי G ועוד קודקוד חדש v, שקשתותיו הם קשתות G וכל הקשתות האפשריות בין v לקודקודי G.
הוכיחו שב- H יש מעגל אוילר.

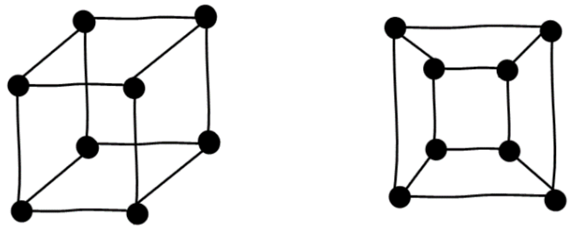
19) הוכיחו או הפריכו: אם $G=(V,E)$ אוילרי דו צדדי, אז: $|V| \in \mathbb{N}_{even}$.
(שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

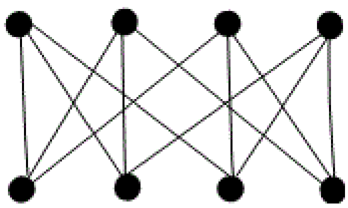
איזומורפיזם

שאלות

1) הוכיחו כי הגרפים הבאים איזומורפיים זה לזה.
זה אומר שגרף הקובייה התלת מימדי הוא מישורי (כלומר, ניתן לשכן אותו במישור [למצוא גרף איזומורפי לו] מבלי שאף צלע חותכת צלע אחרת).

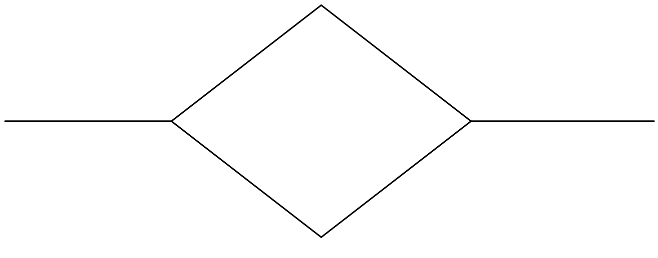


2) הוכיחו כי ניתן לשכן במישור את הגרף הבא.
כלומר, קיים גרף G איזומורפי לו, מבלי שאף צלע ב- G חותכת צלע אחרת.



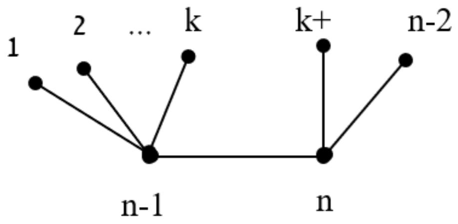
3) יהיו G_1, G_2 שני גרפים איזומורפיים.
הוכיחו כי G_1 חסר מעגלים $\Leftrightarrow$ G_2 חסר מעגלים, והסיקו כי G_1 עץ $\Leftrightarrow$ G_2 עץ.

4) כמה גרפים שונים זה מזה ואיזומורפיים לגרף שמצויר להלן אפשר לבנות על קבוצת הקודקודים $\{a, b, c, d, e, f\}$?



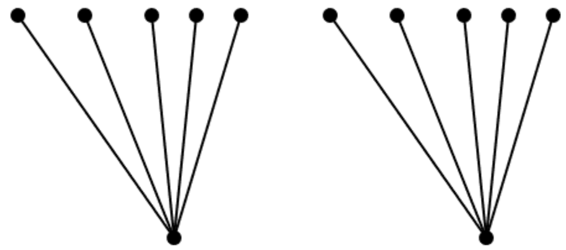
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

5) כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים $V=\{1,2,...,n\}$ איזומורפיים לגרף הבא:



תנו תשובה לכל k,n טבעיים המקיימים $2\le k\le n-3$.
הפרידו בין המקרים $n=2k+2$, $n\neq 2k+2$.

6) כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים $V=\{v_1,v_2,...,v_{12}\}$ איזומורפים לגרף הבא:



7) הוכיחו או הפריכו:
אם לשני גרפים אותה רשימת דרגות (כלומר, אם נסדר את דרגות קודקודי כל אחד מהגרפים בסדר עולה, נקבל אותה סדרה), אז הגרפים איזומורפיים.

8) נגדיר C_n להיות מעגל על n קודקודים.
לאילו ערכים של n מתקיים ש- C_n איזומורפי ל- $\bar{C}_n$?
(כאשר $\bar{C}_n$ הוא הגרף המשלים)

9) יהי T עץ.
מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים $V=\{1,2,3,4,5,6\}$, שאף שניים מהם אינם איזומורפיים?
(שאלה מאתגרת)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il